

УДК 537.84+621.365.5

У. А. Бетхерс, А. Р. Муйжниекс, Н. В. Никифорова,
С. И. Павлов, Л. Л. Тир, А. Т. Якович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕРИДИОНАЛЬНОМ
СЕЧЕНИИ ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ
С РАЗРЕЗНЫМ ПРОВОДЯЩИМ ТИГЛЕМ

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

ВВЕДЕНИЕ

Индукционные печи с холодным тиглем (ИПХТ-М) — перспективный вид электротермического оборудования для выплавки металлов и сплавов без загрязнения расплава материалом тигля. По сравнению с индукционными тигельными печами (ИТП) ИПХТ-М имеют следующие отличия [1]: 1) электропроводящий (медный), разделенный вертикальными разрезами на электрически изолированные секции принудительно охлаждаемый тигель; 2) электромагнитное (ЭМ) отжатие части боковой поверхности расплава от тигля, сокращающее тепловые потери.

В ИПХТ-М разрезной проводящий тигель нарушает круговую симметрию вихревых токов, характерную для ИТП. Система «индуктор—тигель—расплав» сохраняет симметрию поворота, и задача ЭМ-расчета становится существенно трехмерной, реализация которой для многовариантных расчетов на ЭВМ нецелесообразна. В [1, 2] предложено использовать двухмерные модели горизонтального ($z=\text{const}$) или меридионального ($\alpha=\text{const}$) сечений ИПХТ-М с введением ряда упрощающих предположений.

В [1] разработана математическая модель горизонтального сечения ИПХТ-М, показаны особенности ЭМ- поля и вихревых токов, вносимые разрезами проводящего тигля и переходным электрическим сопротивлением $R_{\text{п}}$ на границе «расплав—тигель». При расчете ротора ЭМ- силы в [1] получены ненулевые значения для z -компоненты и рассчитано вызываемое ею движение. Эти данные явились результатом ошибки в вычислениях. В двухмерной постановке, принятой в [1], $\varepsilon_z = (\text{rot } \mathbf{f})_z$ тождественно равна нулю.

В настоящей работе осесимметричная модель ИТП [3] развивается на случай проводящего разрезного тигля для определения ЭМ- поля азимутально направленных вихревых токов в меридиональном ($\alpha=\text{const}$) сечении ИПХТ-М. Расчет перераспределения токов по высоте тигля производится на базе двух моделей: 1) «идеальной» — без учета сопротивления боковых граней секций тигля; 2) «реальной» — с учетом комплексного сопротивления боковых граней. Результаты расчетов, полученные с использованием конечно-разностного метода и метода взаимосвязанных контуров для «идеальной» модели ИПХТ-М сопоставляются с результатами для меридионального сечения ИТП.

Исследование тороидального движения расплавленного металла с азимутально направленным ротором скорости ω_α проводится по методике [3] с использованием полученных по предлагаемой методике распределений составляющих ЭМ- силы.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИПХТ-М

Трехмерная схема ИПХТ-М представлена на рис. 1, схема меридионального сечения ($\alpha = \text{const}$) — на рис. 2. При формулировке моделей принимаются следующие допущения (см. также [2]):

1. Расплав 1 имеет произвольную осесимметричную форму. По периметру горизонтального сечения ИПХТ-М ($z = \text{const}$) не учитывается зона частичного отжатия [1].

2. Между расплавом и тиглем 2 отсутствует электрический контакт. Условия плавки таковы, что верхняя часть расплава отжата от тигля ЭМ-полем, а нижняя часть расплава соприкасается с тиглем, на поверхности которого имеется изоляционный слой: искусственный (при футерованном холодном тигле) или естественный (определенный свойствами контакта «расплав—тигель»). Вихревые токи не пересекают границу «расплав—тигель» ($R_{\text{п}} \geq 10^{-5} - 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ [1]).

3. В тигле наблюдается выраженный скин-эффект: при минимальной рабочей частоте тока в индукторе $5 f_0 = 2400$ Гц глубина проникновения ЭМ- поля в тигель $\delta_t = 1,3$ мм при размере секции в радиальном направлении порядка 30 мм. В меридиональном сечении (рис. 2) тигель представляется двумя токовыми слоями: внутренним 2в, обращенным к расплаву, и наружным 2н, обращенным к индуктору, толщины которых определяются толщинами стенок тигля d_v и d_n (рис. 1) или глубиной δ_t .

4. Считается, что при азимутальном токе в индукторе плотность тока в расплаве, во внутреннем и наружном слоях тигля также имеет только азимутальную составляющую (рис. 1).

5. В силу взаимной ортогональности смежных участков токовых линий («в» и «н», рис. 1) азимутальной ориентации во внутреннем и на-

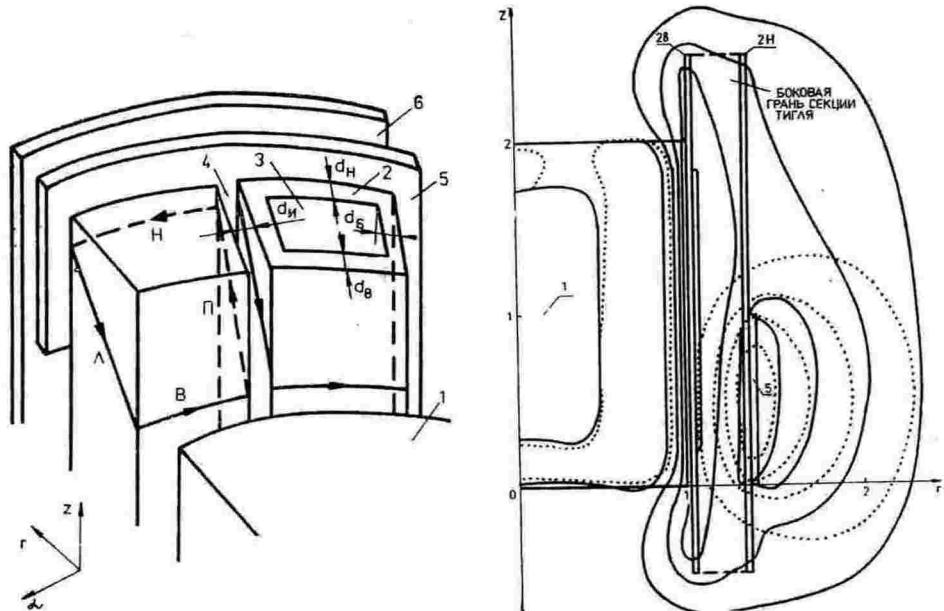


Рис. 1. Схема индукционной печи с холодным тиглем (ИПХТ-М): 1 — расплав; 2 — секция тигля; 3 — канал охлаждения; 4 — изоляция; 5 — индуктор; 6 — магнитопровод. Схема тока во внутреннем («в») и наружном («н») слоях тигля, обращенных к расплаву и индуктору, и на боковых гранях, прилегающих к правой («п») и левой («л») секциям тигля

Рис. 2. Схема меридионального сечения ИПХТ-М (обозначения на рис. 1). Силовые линии магнитного поля для модели с холодным тиглем (—) и без холодного тигля (...)

ружном слоях тигля с токовыми линиями в боковых гранях секции тигля («п» и «л») пренебрегаем влиянием их магнитных полей друг на друга. Ввиду сближенности противоположно направленных токовых линий в боковых гранях соседних секций тигля их результирующее поле не учитывается. Допущение справедливо при $\Delta\alpha \ll \pi/\kappa - \Delta\alpha_i$ (κ — количество секций тигля; $\Delta\alpha$ — угловой размер токового слоя на боковой грани секции тигля; $\Delta\alpha_i$ — угловой размер изоляции 4).

6. Реальный токовый слой на боковой грани секции тигля заменяется слоем с постоянной по его толщине амплитудой $j^p/2$ и фазой плотности тока (j^p — амплитуда на поверхности боковой грани). Толщина токового слоя a принимается равной толщине боковой стенки тигля d_b (рис. 1) или глубине δ_t .

7. Области поворота токов с боковой грани тигля во внутренний и наружный слои тигля не учитываются.

Перечисленные допущения позволяют рассматривать трехмерную систему токов в ИПХТ-М как две взаимосвязанные двухмерные системы токов: 1) осесимметрическая система токов азимутальной ориентации в индукторе, внутреннем и наружном слоях тигля и в расплаве; 2) система токов с компонентами радиального и аксиального направления в боковых гранях секций тигля.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭМ-ПОЛЯ АЗИМУТАЛЬНЫХ ТОКОВ

Уравнение в безразмерной форме для азимутальной составляющей комплексной амплитуды векторного потенциала магнитного поля A_α следующее [3]:

$$\Delta A_\alpha - A_\alpha/r^2 = -j_\alpha. \quad (1)$$

Δ — лапласиан в цилиндрической системе координат. Характерные величины: $A_0 = j_0 \mu_0 r_0^2$, j_0 — модуль плотности тока в индукторе, r_0 — радиус расплава. В правой части (1) азимутальная составляющая плотности тока j_α равна: для индуктора — плотности внешних токов j_α^{ex} ; для расплава — плотности вихревых токов $j_\alpha^p = -i\hat{\omega}_p A_\alpha$ (безразмерная частота $\hat{\omega}_p = \mu_0 \sigma_p \omega r_0^2$, σ_p — электропроводность, ω — круговая частота тока индуктора); для непроводящих областей $j_\alpha = 0$.

Во внутреннем 2в и наружном 2н слоях тигля (рис. 2) плотность вихревого тока j_α^T (в (1) $j_\alpha = j_\alpha^T$) складывается из $-i\hat{\omega}_t A_\alpha$ ($\hat{\omega}_t$ — безразмерная частота тигля) и $-\omega_t \Phi/r$:

$$j_\alpha^T = -\hat{\omega}_t (iA_\alpha + \Phi/r). \quad (2)$$

Второе слагаемое обусловлено частью азимутальной составляющей градиента скалярной функции Φ : $\Phi = \partial\phi/\partial\alpha$, возникающей при сведении трехмерной задачи к двухмерной ($\phi_0 = j_0 r_0 / \sigma_t$). Таким образом учитывается разность потенциалов между боковыми гранями секции тигля, возникающая при замыкании тока в пределах каждой секции.

Для расчета ЭМ-поля по уравнению (1) необходимо найти распределение Φ во внутреннем и наружном слоях тигля.

3. УЧЕТ ПЕРЕТЕКАНИЯ ТОКОВ ПО БОКОВЫМ ГРАНЯМ СЕКЦИИ ТИГЛЯ

3.1. «ИДЕАЛЬНАЯ» МОДЕЛЬ БОКОВОЙ ГРАНИ СЕКЦИИ ТИГЛЯ

Каждая из двух идеально проводящих боковых граней секции тигля эквипотенциальна, и в (2) Φ постоянно для внутреннего и наружного слоев тигля

$$\Phi = \text{const.} \quad (3)$$

Для нахождения Φ используется условие замкнутости тока в пределах секции тигля: интегральный ток через меридиональное сечение тигля равен нулю

$$\int_{\Omega_B} j_\alpha^T dr dz + \int_{\Omega_H} j_\alpha^T dr dz = 0 \quad (4)$$

(Ω_B, Ω_H — сечения внутреннего и наружного слоев тигля), откуда для Φ с учетом (2) следует:

$$\Phi = -i \frac{\hat{\omega}_T^B \int_{\Omega_B} A_\alpha dr dz + \hat{\omega}_T^H \int_{\Omega_H} A_\alpha dr dz}{\hat{\omega}_T^B \int_{\Omega_B} dr dz / r + \hat{\omega}_T^H \int_{\Omega_H} dr dz / r} \quad (5)$$

($\hat{\omega}_T^B, \hat{\omega}_T^H$ — безразмерные частоты для внутреннего и наружного слоев тигля, различие значений которых обусловлено различием температур поверхностей тигля, обращенных к расплаву и индуктору).

Напряжение U (см. в [2] расчет на базе метода взаимосвязанных контуров (МВК)), противоположное по знаку разности потенциалов между боковыми гранями секции тигля, возникающей при замыкании тока в пределах каждой секции, связано с Φ (3) следующим соотношением в размерной форме (в отличие от остальных формул в статье):

$$\kappa U = -(2\pi - \kappa \Delta \alpha_i) \Phi. \quad (6)$$

3.2. «РЕАЛЬНАЯ» МОДЕЛЬ БОКОВОЙ ГРАНИ СЕКЦИИ ТИГЛЯ

При учете сопротивления боковой грани тигля азимутальная составляющая градиента скалярной функции Φ не является постоянной. Уравнение для Φ получается из закона сохранения тока в слое на боковой грани секции тигля:

$$\int_V \operatorname{div}(j_r \mathbf{e}_r + j_z \mathbf{e}_z) dV = - \oint_S j_\alpha \mathbf{e}_\alpha dS \quad (7)$$

($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы в направлениях r, α, z). Интеграл в правой части (7) от токов j_α азимутального направления берется по поверхности S объема токового слоя V на боковой грани и вырождается в интеграл по сечениям внутреннего и наружного слоев тигля (см. рис. 1, 2).

В силу того что из-за скин-эффекта радиальная j_r и аксиальная j_z составляющие плотности тока от своих значений j_r^n и j_z^n на поверхности боковой грани убывают в азимутальном направлении в глубь тигля по закону

$$j_r = \frac{\sqrt{2}}{2} j_r^n e^{-ra/a}, \quad j_z = \frac{\sqrt{2}}{2} j_z^n e^{-ra/a}, \quad (8)$$

объемный интеграл в левой части (7) равен (см. также допущение (6))

$$\frac{\sqrt{2}}{9} a \int_V \operatorname{div}(j_r^n \mathbf{e}_r + j_z^n \mathbf{e}_z) dr dz \quad (9)$$

(a — толщина токового слоя на боковой грани). Интегрирование в (9) ведется по поверхности боковой грани.

Если в (7) выбирается объем V , поверхность S которого не пересекает внутренний или наружный слой тигля, интеграл в правой части равен нулю и, учитывая (9) и соотношение $\mathbf{j}^n = -\hat{\omega}_t \operatorname{grad} \varphi$, для скалярной функции φ следует

$$\Delta\varphi = 0. \quad (10)$$

Если поверхность S пересекает внутренний или наружный слой тигля, интеграл в правой части (7) отличен от нуля и уравнение для φ следующее:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a \hat{\omega}_t \Delta\varphi = \pm (iA_\alpha + \Phi/r) \quad (11)$$

(в правой части (11) знаки «-» и «+» соответствуют левой «л» и правой «п» (рис. 1) боковым граням секции тигля и связаны с ориентацией поверхности при интегрировании (7)).

Уравнение для Φ (постоянного по α (!)) на боковой грани получается вычитанием уравнений (10) или (11) на левой и правой боковых гранях и делением результата на угловой размер секции тигля:

$$\Delta\Phi = \begin{cases} 0; \\ K(iA_\alpha + \Phi/r); \Omega_b, \Omega_h; \end{cases} \quad (12)$$

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{a} / (2\pi/\kappa - \Delta\alpha_i). \quad (13)$$

Уравнение (12) решается в меридиональном сечении секции тигля (рис. 1, 2) — в боковой грани.

Краевые условия для Φ выражают равенство нулю составляющей плотности тока в боковой грани, направленной по нормали n к границе:

$$\partial\Phi/\partial n = 0. \quad (14)$$

4. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

В расчетах используется конечноразностный метод (МКР). Исследуемая область покрывается согласованной конечно-разностной сеткой со сгущением узловых точек в пределах скин-слоев во внутреннем и наружном слоях тигля, а также в расплаве (рис. 2).

Для уравнения (1) методом баланса строится консервативная разностная схема сквозного счета, аналогичная приведенной в [3]. При построении методом баланса консервативного разностного аналога уравнения (12) используется подмножество узловых точек сетки, относящихся к сечению боковой грани.

Разностная схема для уравнения (1) решается методом итераций совместно с записанным на сетке аналогом условия (5) (для «идеальной» модели) или совместно с разностным аналогом уравнения (12) (для «реальной» модели). Используется релаксация с комплексным коэффициентом u ($\sim 1,65$; $\sim -0,45$).

Программа расчетов МКР реализована на ЕС-1060. Для варианта с 5000 узловых точек время расчета до 1 ч для «идеальной» модели или до 3 ч для «реальной» модели в зависимости от требуемой точности.

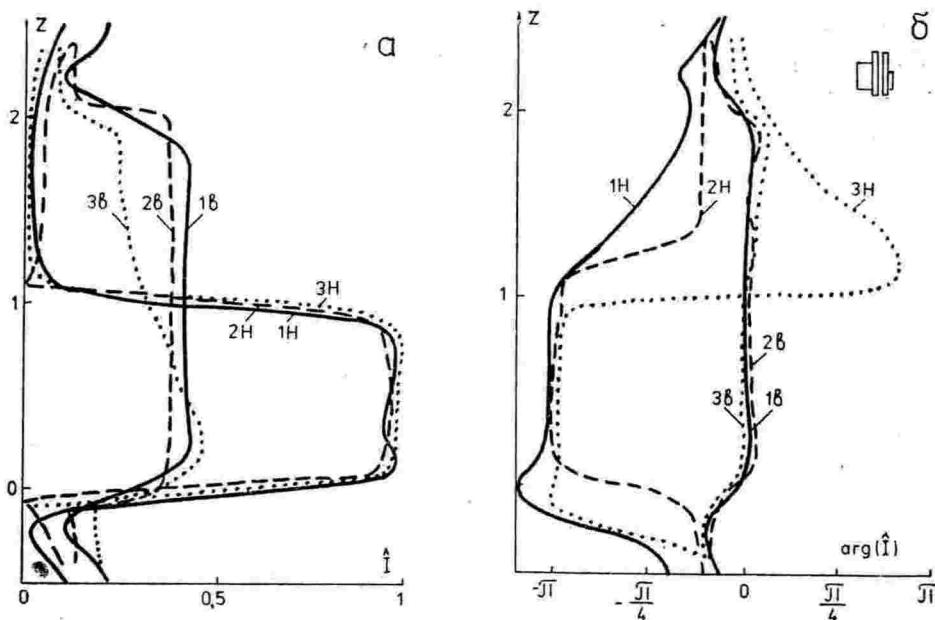


Рис. 3. Линейная плотность тока I (а), отнесенная к линейной плотности тока в индукторе, и фаза $\arg(I)$ (б) в зависимости от высоты z во внутреннем (кривые «в») и наружном (кривые «н») слоях тигля; 1 и 2 — расчет МВК и МКР без учета сопротивления боковой грани; 3 (состоит из точек) — расчет МКР с учетом сопротивления боковой грани

Проведено сравнение результатов для «идеальной» модели по двум независимым методикам: МВК [2] и МКР. На рис. 3 (кривые 1, 2) показаны распределения линейной плотности тока и его фазы во внутреннем и наружном слоях тигля. Результаты хорошо согласуются. Отличия связаны с разбиением проводящих областей (для МВК — около 50 колец [2], для МКР — около 1000 узловых точек).

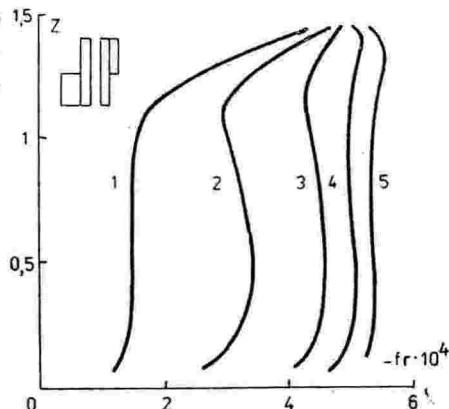
5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2, 3 представлены характерные результаты расчетов ЭМ-величин для ИПХТ-М. Для иллюстрации выбрана следующая модель (рис. 2): радиус расплава $r_0 = 0,1$ м; высота расплава $h_p = 2r_0$; высота холодного тигля $h_t = 3r_0$; высота индуктора $h_i = r_0$; $\omega_p = 140$; $\hat{\omega}_t^B = 4535$; $\hat{\omega}_t^H = 9475$.

На рис. 2 показаны силовые линии магнитного поля для ИПХТ-М («идеальная» модель) и ИТП, соответствующие моменту, когда амплитуда плотности тока в индукторе максимальна. Картина поля в расплаве «идеальной» ИПХТ-М (в том числе и для модели на рис. 2) мало зависит от взаимного расположения тигля, индуктора и расплава (в отличие от распределения магнитного поля в расплаве ИТП) и аналогична картине поля в ИТП при симметрично расположенным индукторе. В ИПХТ-М величина поля в расплаве больше, поскольку индуктор ИТП расположен дальше, чем внутренний токовый слой холодного тигля (рис. 2).

Распределение тока по высоте тигля ИПХТ-М показано на рис. 3: в наружном слое ток отличен от нулевых значений в области, по высоте

Рис. 4. Радиальная составляющая ЭМ-силы в расплаве ($\omega_p = 100$) в зависимости от высоты z : 1 — $\hat{\omega}_t = 50$; 2 — $\hat{\omega}_t = 100$; 3 — $\hat{\omega}_t = 250$; 4 — $\hat{\omega}_t = 500$; 5 — $\hat{\omega}_t = 1000$



равной индуктору; во внутреннем слое — в области, по высоте равной расплаву. Фаза указывает направление токов: в наружном слое тигля ток противоположен по направлению току индуктора и току во внутреннем слое тигля, но совпадает с направлением тока в расплаве. Сопротивление боковой грани («реальная» модель) препятствует равномерному («идеальному») распределению тока по высоте внутреннего слоя тигля (рис. 3, а, з).

Для «идеальной» модели ИПХТ-М распределение радиальной составляющей ЭМ-силы f_r практически однородно по высоте расплава (рис. 4, б) при любом расположении индуктора относительно расплава. При увеличении прозрачности тигля для ЭМ-поля (уменьшении $\hat{\omega}_t$) неоднородность f_r по высоте увеличивается (кривые 1—4), и распределение f_r приближается к распределению f_r для ИТП (рис. 4 соответствует модели с параметрами: $r_0 = 0,068$ м; $h_p = 1,5r_0$; $h_t = 3r_0$; $h_i = h_p$ и несимметричным расположением индуктора).

Выводы. 1. Предложены двухмерные модели для расчета электромагнитного поля азимутальных токов в индукционных печах с секционированным проводящим холодным тиглем с учетом перераспределения токов по высоте тигля.

2. Разработанная методика расчета электромагнитных параметров является базой для исследования течений расплава в ИПХТ-М, режимы которых могут существенно отличаться [4] от режимов течений в ИТП обычного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никифорова Н. В., Павлов С. И., Тир Л. Л. Расчеты электромагнитных, энергетических и гидродинамических характеристик индукционной печи с холодным тиглем (двухмерная модель) // Магнитная гидродинамика. — 1984. — № 2. — С. 101—110.
2. Тир Л. Л. Математическое моделирование электромагнитных и гидродинамических полей в индукционных печах с холодным тиглем // Исследование и разработка индукционных печей с холодным тиглем. — М.: Энергоатомиздат. — 1986. — С. 80—88.
3. Микельсон Ю. Я., Павлов С. И., Якович А. Т. Методика численного расчета осесимметричного МГД-течения в произвольной области // Электродинамика и механика сплошных сред. — Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1980. — С. 3—19.
4. Никифорова Н. В., Павлов С. И., Тир Л. Л., Якович А. Т. Численное исследование электромагнитных и гидродинамических полей в индукционной печи с холодным тиглем (меридиональное сечение) // XII Рижское совещ. по магнитной гидродинамике. Саласпилс: Ин-т физики АН ЛатвССР, 1987. — Т. 2. — С. 227—230.

NUMERICAL SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD
IN MERIDIONAL SECTION OF INDUCTION FURNACE
WITH SEGMENTED COLD CRUCIBLE

U. Betters, A. Muznieks, N. Nikiforova, S. Pavlov,
L. Tir, A. Yakovich

Summary

To define the electromagnetic (EM) field of azimuthal eddy current to the meridional ($\alpha = \text{const}$) section of induction furnace with cold crucible (IFCC) the axially symmetric model has been developed as the extension of the model of induction coreless furnace (ICF) for the case of conductive segmented crucible. Taking into account the redistribution of eddy current in terms of crucible height two models of the lateral faces of crucible section have been developed (lateral faces connect conductively the currents of azimuthal direction): 1) «ideal» — lateral face impedance neglected; 2) «real» — lateral face impedance taken into account.

The EM-field results for the «ideal» model of IFCC computed by a finite difference method and a method of inductively connected loops have been compared with the results for ICF.

Поступило 26 VI 1988 г.